chapitre 8 : Mécanique des systèmes de pts matériels.

On va aborder dans ce chapitre la mécanique des systèmes formés par n pts matériels et en particulier $n=2$.

I_ Grandeurs cinématiques :

I.1 Barycentre d'un système : (ou centre de masse)

Pour un système formé par n pts mat. $M_i(m_i)$. le centre de masse G (le barycentre) est défini par Σm_i . $\Sigma m_i \vec{GM_i} = \vec{0}$ ou aussi $\vec{OG} = \frac{\sum^{n} m_i \vec{OM_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$

si $n=2$: $\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OM_1} + m_2 \vec{OM_2}}{m_1 + m_2}$

où O est l'origine de référentiel d'étude.

Remarques :
la position de G est indépendante de l'orig
* $\vec{V}(G/R) = \frac{\Sigma m_i \vec{V}(M_i/R)}{\Sigma m_i}$

aussi : $\vec{\gamma}(G/R) = \frac{\Sigma m_i \cdot \vec{\gamma}(M_i/R)}{\Sigma m_i}$

I.2 - Réf. barycentrique (R_B, R_G, R^*) :

soit $R(O, X, Y, Z)$ un réf. galiléen. On appelle un réf. barycentrique R_B le réf. d'origine G et d'axe parallèle à ceux de R.

$\Rightarrow R_B$ est en mvt de translation % R

$\Rightarrow \vec{\Omega}_{R_B/R} = \vec{0}$

si G a un mvt rect. uniforme % R.

R_B est galiléen :

Cas particulier : $n = 2$ $(M_1(m_1), M_2(m_2))$

$= \vec{V}_1(M_1/R)$ et $V_2 = \vec{V}(M_2/R)$

. vitesse relative de M_2 % M_1 dans R est donnée par :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt}) - \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt}$$

$$= \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \quad \text{(V. rel de } M_2/M_1 \text{ dans R)}$$

=> cherchons cette vitesse ds R_B :

* R est fixe et R_B mobile /R.

* $\vec{V}_{1B} = \vec{V}(M_1/R_B)$

* $\vec{V}_{2B} = \vec{V}(M_2/R_B)$

L.C.V => $\vec{V}_1 = \vec{V}_{1B} + \vec{V}_e$

$\vec{V}_2 = \vec{V}_{2B} + \vec{V}_e$

Or : $\vec{V}_e = \vec{V}(G/R)$

=> $\vec{V}_{1B} = \vec{V}_1 - \vec{V}_G$

$\vec{V}_{2B} = \vec{V}_2 - \vec{V}_G$

=> La vitesse relative de M_2/M_1 dans R_B est :

$\vec{V}_B = \vec{V}_{2B} - \vec{V}_{1B} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$

(où $\vec{V}_{2B} = \frac{d\overrightarrow{GM_2}}{dt}$ et $\vec{V}_{1B} = \frac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt}$)

La vitesse relative de M_2/M_1 est la même dans R et R_B

2/- si on pose : $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1G} + \overrightarrow{GM_2}$

$= \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1} = \vec{r}_{2B} - \vec{r}_{1B}$

Or d'après la définition du barycentre :

$$\Sigma m_i \overrightarrow{GM_i} = 0$$

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 \vec{r}_{1B} + m_2 \vec{r}_{2B} = 0 \\ \vec{r} = \vec{r}_{2B} - \vec{r}_{1B} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{1B} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{r}_{2B} = \frac{m_1}{m_1+m_2}.\vec{r}$$

On a aussi : $\vec{V}_{1B} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{V}$ ($\vec{V}$: vitesse rela de M_2/M_1)

$$\vec{V}_{2B} = \frac{m_1}{m_1+m_2}.\vec{V}$$

de même pour $\vec{\gamma}_{1B}$ et $\vec{\gamma}_{2B}$.

II - Grandeurs cinétiques :

II. 1 - Quantité de mvt :

Soit un système S formé de N pts mat., dans un ré; R(O, X, Y, Z) (on suppose que R est galiléen).

si N = 1 : $\vec{p}(M/R) = m.\vec{V}(M/R)$

si N = 2 : $\vec{p}(S/R) = m_1.\vec{V}(M_1/R) + m_2.\vec{V}(M_2/R)$

- si N est qq :

$$\vec{p}(S/R) = \sum_i m_i.\vec{V}(M_i/R)$$

Par définition du barycentre G :

$$\vec{OG} = \frac{\sum m_i \vec{OM_i}}{\sum m_i}$$

On pose : $M = \sum m_i$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{OG}}{dt} = \frac{1}{M}\left(\sum m_i \cdot \frac{d\vec{OM_i}}{dt}\right)$$

$$\vec{V}(G/R) = \frac{1}{M}\left(\vec{P}(S/R)\right)$$

$$\Rightarrow \vec{p}(S/R) = M \cdot \vec{V}(G/R)$$

La quantité du mvt $\vec{p}$ d'un système S dans un réf. galiléen R est la même que celle d'un pt matériel de masse M et de vitesse égale à celle de G.

Remarque :

Calculons $\vec{p}(S/R_B)$

$$\vec{p}(S/R_B) = \sum m_i \cdot \vec{V}(M_i/R_B)$$

$$= \sum m_i \left.\frac{d\vec{GM_i}}{dt}\right)_{R_B}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\sum m_i \vec{GM_i}}_{=\vec{0}}\right)$$

$$= \vec{0}$$

La quantité du mvt du système S dans R_B nulle.

II-2 Moment cinétique :

si $N = 1$: $\vec{\sigma_0}(M/R) = \vec{OM} \wedge m\vec{V}(M/R)$

si $N = 2$: $\vec{\sigma_0}(S/R) = \vec{OM_1} \wedge m_1 \vec{V}(M_1/R) + \vec{OM_2} \wedge m_2 \vec{V}(M_2/R)$

$$\Rightarrow \vec{\sigma_0}(S/R) = \sum_i \vec{OM_i} \wedge m_i \vec{V}(M_i/R)$$

le vecteur moment cinétique du système S, dans R par

Or la L.C.V : $\vec{V}(M_i/R) = \vec{V}(M_i/R_B) + \vec{V}(G/R)$

$$\Rightarrow E_c(S/R) = \frac{1}{2}\sum m_i \left(\vec{V}(M_i/R_B) + \vec{V}(G/R)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i \vec{V}^2(M_i/R_B) + \frac{1}{2}\sum m_i \vec{V}^2(G/R) + \sum m_i \vec{V}(M_i/R)$$

$$= E_c(S/R_B) + \frac{1}{2}\left(\sum m_i\right)\vec{V}^2(G/R) + \underbrace{\vec{P}(S/R_B)}_{=\vec{0}} \cdot \vec{V}(G/R).$$

$$E_c(S/R) = E_c(S/R_B) + \frac{1}{2} M \vec{V}^2(G/R)$$

C'est le 2ème théorème de Koenig.

III - Dynamique du système de pts materiels :

III - 1 - Forces intérieurs et extérieurs au système :

tout points M_i

$\forall$ de système S est soumis d'une part aux forces qui proviendent de l'exterieure et ils sont dites forces exterieur d'autre part des forces qui proviennent des autres pts matériels ils sont dites forces interieurs.

Les forces interieurs obeissent au Principe d'action et de réaction. $\vec{F}(M_j/M_k) = -\vec{F}(M_k/M_j)$.

Ce qui donne que la résultante des forces interieurs au système S est nulles. (Les forces s'annule deux à deux

$$\Rightarrow \vec{F}_{int} = \vec{0}$$

III - 2 . Th. de la quantité de mvt :

$$* \ \vec{P}(S/R) = \sum m_i \vec{V}(M_i/R)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt}(S/R) = \sum_i m_i \vec{\gamma}(M_i/R)$$

$$= \sum_i \vec{F}_i = \sum_i (\vec{F}_{int} + \vec{F}_{ext})$$

$$= \underbrace{\vec{F}_{int}}_{\vec{0}} + \vec{F}_{ext}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_0(S/R) = \sum (\vec{OG} + \vec{GM_i}) \wedge m_i \vec{V}(M_i/R)$$

$$= \sum \vec{OG} \wedge m_i \vec{V}(M_i/R) + \underbrace{\sum \vec{GM_i} \wedge m_i \vec{V}(M_i/R)}_{\vec{X}}$$

$$= \vec{OG} \wedge (\sum m_i \vec{V}(M_i/R)) + \vec{X}$$

$$= \vec{OG} \wedge \vec{p}(S/R) + \vec{X}$$

$$\vec{X} = \sum \vec{GM_i} \wedge m_i (\vec{V}(M_i/R_B) + \vec{V}(G))$$

$$= \sum \vec{GM_i} \wedge m_i \vec{V}(M_i/R_B) + \sum \vec{GM_i} \wedge m_i \vec{V}(G)$$

Or pour $N = 2$:

$$\vec{GM_1} \wedge m_1 \vec{V}(G) + \vec{GM_2} \wedge m_2 \vec{V}(G)$$

$$= m_1 \vec{GM_1} \wedge \vec{V}(G) + m_2 \vec{GM_2} \wedge \vec{V}(G)$$

$$= (m_1 \vec{GM_1} + m_2 \vec{GM_2}) \wedge \vec{V}(G)$$

$$\Downarrow$$

$$(\underbrace{\sum m_i \vec{GM_i}}_{0}) \wedge \vec{V}(G)$$

$$\Rightarrow \vec{X} = \vec{\sigma}_G(S/R_B) + (\underbrace{\sum m_i \vec{GM_i}}_{0}) \wedge \vec{V}(G)$$

$$= \vec{\sigma}_G(S/R_B)$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_0(S/R) = \vec{\sigma}_G(S/R_B) + \vec{OG} \wedge \vec{p}(S/R)$$

C'est le 1er théorème de Koenig.

II . 3 Energie cinétique :

si $N = 1$: $E_c(M/R) = \frac{1}{2} m (\vec{V}(M/R))^2$

si $N = 2$: $E_c(S/R) = \frac{1}{2} m_1 (\vec{V}(M_1/R))^2 + \frac{1}{2} m_2 (\vec{V}(M_2/R))^2$

$\Rightarrow$ Pour N qq :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{V}(M_i/R))^2$$



$\Rightarrow \dfrac{d\vec{p}(S/R)}{dt} = \vec{F}_{ext}$

Enoncé : la dérivée par rapport au temps dans le réf. R de la quantité de mvt d'un système S est égale à la résultante de toute les forces exterieurs appliqué a système.

Remarque :

On sait que : $\vec{p}(S/R) = M . \vec{v}(G/R)$

$\Rightarrow \dfrac{d\vec{p}(S/R)}{dt} = M . \vec{\gamma}(G/R)$

$\Rightarrow M . \vec{\gamma}(G) = \vec{F}_{i\,ext}$

Le mvt du barycentre G est identique à celui du pt m de masse M et soumis à la résultante des forces ext

C'est le théorème du barycentre (ou théorème de la résult. cinétique).

III - 3 - Th. de moment cinétique :

i/- Moment d'une force par rapport à un pt fixe.

$\mathcal{M}_0(\vec{F}_i) = \vec{OM}_i \wedge \vec{F}_i$

$\Rightarrow$ pour un système s formé de M : le moment résul est :

$\vec{\mathcal{M}}_0 = \Sigma \vec{OM}_i \wedge \vec{F}_i$

* On peut démontrer que :

le moment résultent des forces interieur est aussi nul.

$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}_{int}) = \vec{\mathcal{M}}_{0\,int} = \vec{0}$.



Exemple de calcul du moment :

Chaque pt M_i du système S est soumis à son poids

$$\vec{P_i} = m_i \vec{g}$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P_1} + \vec{P_2} + \dots + \vec{P_n}) = \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P_1}) + \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P_2}) + \dots + \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P_n})$$

$$= (\vec{OM_1} \wedge m_1 \vec{g}) + (\vec{OM_2} \wedge m_2 \vec{g}) + \dots + (\vec{OM_n} \wedge m_n \vec{g})$$

$$= (\underbrace{\sum m_i \vec{OM_i}}_{M \vec{OG}}) \wedge \vec{g}$$

$$= M . \vec{OG} \wedge \vec{g} = \vec{OG} \wedge M \vec{g}$$

$$(\text{où} : M = \sum m_i)$$

ii/- Th. de moment cinétique dans un réf. galiléen :

$$\vec{\sigma}_o(S/R) = \sum \vec{OM_i} \wedge m_i \vec{V}(M_i/R)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_o(S/R)}{dt} = \sum \vec{V}(M_i) \wedge m_i \vec{V}(M_i/R) + \sum \vec{OM_i} \wedge m_i \vec{\gamma}(M_i/R)$$

$$= \sum \vec{OM_i} \wedge \vec{F}_{i_{int}} + \vec{F}_{i_{ext}}$$

$$= \sum \vec{OM_i} \wedge \vec{F}_{i_{int}} + \sum \vec{OM_i} \wedge \vec{F}_{i_{ext}}$$

$$= \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}_{i_{int}})}_{\vec{0}} + \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}_{i_{ext}})$$

$$= \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}_{ext})$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_o(S/R)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_o(F_{ext})$$

Énoncé : La dérivée par rapport au temps du moment cinétique $\vec{\sigma}_o(S/R) = \mathcal{M}_o(\vec{F}_{ext})$ est égale au moment des forces exterieur appliquées sur le système S.

Remarque :

. On peut montrer que :

$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt}(S/R_b) = \mathcal{M}_G(F_{ext})$$

où G : le centre de masse.

R_b : réf. barycentrique.

III-4. Th. de l'energie cinétique :

soit $S = \{M_1(m_1), M_2(m_2), \ldots, M_n(m_n)\}$

Chaque M_i a une vitesse $\vec{V}_i = \vec{V}(M_i/R)$

R : réf. supposé galiléen.

dans R : $\vec{F}_i = \vec{F}_{i,int} + \vec{F}_{i,ext}$: la résultante des forc appliquées à M_i.

+ $\delta W(\vec{F}_i) = \vec{F}_i \cdot d\vec{OM}_i$

$$= \vec{F}_i \cdot \vec{V}_i \cdot dt$$

$$= m_i \cdot \frac{d\vec{V}_i}{dt} \cdot \vec{V}_i \, dt$$

$$= d\left[\frac{1}{2} m_i \vec{V}_i^2\right]$$

$$= d(E_{c_i})$$

En considérant tt le système S :

+ $E_c(S/R) = \sum_i E_{c_i}$

+ δW_{int} :

+ δW_{ext} :

$\Rightarrow \delta W_{int} + \delta W_{ext} = d\left(E_c(S/R)\right)$

(TEC sous forme diff.)

En considérant deux instants t_1 et t_2 qui correspondent

. 2 positions :

$$\left(E_c(S/R)\right)_{t_2} - \left(E_c(S/R)\right)_{t_1} = W_{int(1\to 2)} + W_{ext(1\to 2)}$$

(TEC sous sa forme intégrée)

Remarque :

si le système (S) est indéformable :

($\overrightarrow{M_iM_j}$ = cste au cours du temps)

$$W_{int} = 0 \Rightarrow (E_c)_{t_2} - (E_c)_{t_1} = W_{1\to 2(ext)}$$

si R est nn galileen il faut tenir compte des force d'inertie d'entrainement et les fi de coriolis, leur travail est nul.

I-5. Energie pot

Considérons un système (S) indéformable. si les forces exterieurs appliquées à (S) sont conservatives on leur associé une énergie potentielle exterieur tel que :

$$dE_p(S/R) = -\sum_i \delta W_i(\vec{F}_{cor}/R)$$

: la resultante de toutes les forces conservatives appliquées sur M_i

III-6 - L'energie mécanique :

L'energie mécanique d'un système indéformable dans un réf. R .

$$E_m(S/R) = E_c(S/R) + E_p(S/R)$$

si toutes les forces qui travaillent sont conservatives

$$dE_m(S/R) = dE_c(S/R) + dE_p(S/R)$$

$$= \delta W_{ext} - \delta W_{ext}$$



$\Rightarrow E_m(S/R)$ se conserve.

+ s'il existe des forces est qui sont non conservatiques, on

$$\left(E_m(S/R)\right)_2 - \left(E_m(S/R)\right)_1 = \sum_i W(\vec{F}_{nc,i})$$

où : $dE_m = \sum_i \delta W(\vec{F}_{nc,i})$

où : $\vec{F}_{nc,i}$


ETUSUP.com